初识多分辨分析

Dezeming Family

2022 年 4 月 25 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　介绍与定义

多分辨分析及推导出的一系列理论是做小波分析的重要基础。我们前面已经见到了 Haar 小波的基本思想，但 Haar 小波作为一个分析工具过于简单，而且性质并不好（我们以后会提到），而通过多分辨分析得到的香农小波以及 Daubechies 小波才是真正应用更广泛的小波。

多分辨分析又叫正交多分辨分析，因为得到的小波都是正交小波。本文旨在了解多分辨分析的精髓和基本思想。

前面在求内积时，我们在很多步骤上故意忽略了复数函数（毕竟 Haar 小波变换不需要复数），现在我们要变得更严谨一些：

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt \tag{一.1}$$

1 1　多分辨分析的定义

如果 $\{\mathcal{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 满足下面的条件：

$$\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1} \quad (nested) \tag{一.2}$$

$$\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}_j} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad (density) \tag{一.3}$$

$$\cap_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}_j = \{0\} \quad (separation) \tag{一.4}$$

$$f(t)\in\mathcal{V}_0 \Longleftrightarrow f(2^jt)\in\mathcal{V}_j \quad (scaling) \tag{一.5}$$

$$\{\phi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}\ is\ an\ O.N.B\ of\ \mathcal{V}_0 \quad (constructive) \tag{一.6}$$

则称 $\{\mathcal{V}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 上的一个多分辨分析 (multiresolution analysis, MRA)。

上面的五个性质依次可以描述为嵌套性 (nested)、稠密性 (density，构成整个空间)、唯一性 (separation，所有空间一起的并集为 $\{0\}$)、尺度伸缩性 (scaling，即一个 $\mathcal{V}_j$ 内的信号伸长一倍以后，就会被挤入 $\mathcal{V}_{j-1}$；收缩一倍后，就会被挤入 $\mathcal{V}_{j+1}$) 以及可构造性 (constructive，可以由标准正交基来表示)。

对于 $\phi(t)$（注意标准基 $\mathbb{R}$ 上积分并不一定为 1，而是与自己的内积为 1，比如 $\phi_{1,0}(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上积分为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$）：

$$\int_{\mathbb{R}}\phi(t)dt = 1 = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(0) \tag{一.7}$$

右边的等号是因为根据傅里叶变换：

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}dt \Longrightarrow \widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)dt \tag{一.8}$$

1 2　一些推论

对于 $\mathcal{V}_j$ 空间的一组标准正交基为：

$$\{\phi_{(j,k)}(t)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jt-k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \tag{一.9}$$

$$||\phi_{(j,k)}(t)|| = 1 \tag{一.10}$$

当然这并不是唯一的一组标准正交基，比如我们将 $\mathcal{V}_j$ 空间分解为 $\mathcal{V}_{j-1}$ 和 $\mathcal{W}_{j-1}$ 空间（尽管在多分辨分析中还没有定义，但我们前面接触过），则 $\mathcal{V}_j$ 空间的一组标准正交基就可以写为：

$$\{\phi_{(j-1,k)}(t), \psi_{(j-1,k)}(t)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{2^{\frac{j-1}{2}}\phi(2^{j-1}t-k), 2^{\frac{j-1}{2}}\psi(2^{j-1}t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \tag{一.11}$$

$$||\phi_{(j,k)}(t)|| = 1, \quad ||\psi_{(j,k)}(t)|| = 1 \tag{一.12}$$

我们还没有在 MRA 中引入 $\psi(t)$ 函数，所以上面仅仅作为一个了解。

标准正交基需要满足正交性，也就是：

$$\begin{aligned}\left\langle \phi_{(j,k)}(t), \phi_{(j,l)}(t) \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \phi(u)\overline{\phi(u-(l-k))}du \\ &= \left\langle \phi(u), \phi(u-(l-k)) \right\rangle \\ &= \begin{cases} 1, & l=k \\ 0, & otherwise \end{cases}\end{aligned} \tag{一.13}$$

对于 $f(t) \in \mathcal{V}_j$，函数可以写为：

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi_{(j,k)}(t) \tag{一.14}$$

$$c_k = \left\langle f(t), \phi_{(j,k)}(t) \right\rangle \tag{一.15}$$

1 3 小波方程

对于 $f_{j+1}(t) \in \mathcal{V}_{j+1}$，将其投影到 $\mathcal{V}_j$ 空间，求差值：

$$g_j(t) = f_{j+1}(t) - f_j(t) \tag{一.16}$$

得到的 $g_j(t)$ 函数不但是属于 $\mathcal{W}_j$ 空间的函数，而且是 $f_{j+1}(t)$ 到 $\mathcal{W}_j$ 空间的正交投影。

通过小波函数定义 $\mathcal{W}_j$ 空间的标准正交基：

$$\{\psi_{(j,k)}(t)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \tag{一.17}$$

且在《从 Haar 小波认识小波空间》中我们已经介绍过：

$$\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j \tag{一.18}$$

这些在多分辨分析中也是满足的。

二 扩张方程

扩张方程是小波分析中塔式分解算法的基础，理解扩张方程是理解小波分析和快速小波算法的关键。

2 1 $\phi(t)$ 的扩张方程

Haar 小波的扩张方程 (dilation equation) 是我们根据图示和 Haar 小波的特点来推出的，现在我们给出更一般的扩张方程推出形式，不再局限于 Haar 小波。

设 $\phi(t)$ 是 $\mathcal{V}_0$ 空间的尺度函数，由于 $\mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{j+1}$，所以 $\phi(t) \in \mathcal{V}_1$，因此可以得到：

$$\phi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k 2^{\frac{1}{2}} \phi(2t-k) \tag{二.1}$$

$$h_k = \left\langle \phi(t), \phi_{(1,k)}(t) \right\rangle \tag{二.2}$$

这里的 h_k 被称为尺度滤波器 (scaling filter)，我们后面再解释。

我们用 $t \Leftarrow 2^j t - l$ 来代替上式，得到：

$$\begin{aligned}\phi(2^j t - l) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k 2^{\frac{1}{2}} \phi(2(2^j t - l) - k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k 2^{\frac{1}{2}} \phi(2^{j+1} t - (k+2l))\end{aligned}$$

令 $m = k + 2l$，则 $k = m - 2l$：

$$\phi(2^j t - l) = \sum_{(m-2l)\in\mathbb{Z}} h_{m-2l} 2^{\frac{1}{2}} \phi(2^{j+1} t - m)$$

因为 k 可以取遍全部整数，所以：

$$\phi(2^j t-l)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2l}2^{\frac{1}{2}}\phi(2^{j+1}t-m)$$

两边同时乘以 $2^{\frac{j}{2}}$，就能得到：

$$\begin{aligned}2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j t-l)&=2^{\frac{j}{2}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2l}2^{\frac{1}{2}}\phi(2^{j+1}t-m)\\ \Longrightarrow \phi_{(j,l)}(t)&=\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2l}2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}t-m)\\ &=\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2l}\phi_{(j+1,m)}(t)\end{aligned}\tag{二.3}$$

我们先不追究上式的理解，而是先探究一下 h_k 的一些性质。

2 2 尺度滤波器 h_k

由于：

$$\langle\phi_{(j,k)}(t),\phi_{(j,l)}(t)\rangle=\begin{cases}1, & k=l\\ 0, & otherwise\end{cases}\tag{二.4}$$

$$\begin{aligned}\langle\phi_{(j,l)}(t),\phi_{(j+1,k)}(t)\rangle&=\langle\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2l}\phi_{(j+1,m)}(t),\phi_{(j+1,k)}(t)\rangle\\ &=\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2l}\langle\phi_{(j+1,m)}(t),\phi_{(j+1,k)}(t)\rangle=h_{k-2l}\end{aligned}\tag{二.5}$$

所以可以由扩张方程导出：

$$\phi(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k 2^{\frac{1}{2}}\phi(2t-k)\tag{二.6}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\phi_{(0,l)}(t)\overline{\phi(t)}&=\int_{\mathbb{R}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\phi_{(0,l)}(t)\overline{\phi_{(1,k)}(t)}dt\\ &=\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\int_{\mathbb{R}}\phi_{(0,l)}(t)\overline{\phi_{(1,k)}(t)}dt\\ &=\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k h_{k-2l}=\begin{cases}1, & l=0\\ 0, & otherwise\end{cases}\end{aligned}\tag{二.7}$$

令上式的 $l=0$，即可得到：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^2=1\tag{二.8}$$

还有一个性质：

$$\begin{aligned}\phi(t)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k 2^{\frac{1}{2}}\phi(2t-k)\\ \int_{\mathbb{R}}\phi(t)dt&=\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k 2^{\frac{1}{2}}\phi(2t-k)\Big)dt\\ &=\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\int_{\mathbb{R}}\Big(2^{\frac{1}{2}}\phi(2t-k)\Big)dt=\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \Longrightarrow&\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k=\sqrt{2}\end{aligned}\tag{二.9}$$

注意：

$$\int_{\mathbb{R}}2^{\frac{1}{2}}\phi(2t)=2^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}\phi(2t)=2^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\tag{二.10}$$

2 3 小波函数的扩张方程

小波函数 $\psi(t)$ 是 $\mathcal{W}_0$ 空间的函数，由于 $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{V}_1$，因此 $\psi(t) \in \mathcal{V}_1$：

$$\psi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k 2^{\frac{1}{2}} \phi(2t-k) \tag{二.11}$$

$$g_k = \big\langle \psi(t), \phi_{(1,k)}(t) \big\rangle \tag{二.12}$$

其中，$\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 我们以前在 Haar 小波中定义过：

$$\psi_{(j,k)}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \tag{二.13}$$

我们给出：

$$g_k = (-1)^k h_{1-k}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{二.14}$$

注意该式并不是唯一的，有些时候小波分析里会给出（例如 [2]）：

$$g_k = (-1)^{1-k} \overline{h}_{1-k}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{二.15}$$

待会会详细地解释一下。

小波的扩张方程是：

$$\begin{aligned}\psi_{(j,l)}(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_{k-2l} \phi_{(j+1,k)}(t) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k h_{1+2l-k} \phi_{(j+1,k)}(t)\end{aligned} \tag{二.16}$$

g_k 与 h_k 之间的关系

这里解释一下：

$$\begin{aligned}\big\langle \phi(t), \psi(t) \big\rangle &= \Big\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \phi_{(j,k)}(t), \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \phi_{(j,k)}(t) \Big\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \Big\langle \phi_{(j,k)}(t), \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \phi_{(j,k)}(t) \Big\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \overline{g}_k = 0\end{aligned} \tag{二.17}$$

于是，$g_k = (-1)^{1-k}\overline{h}_{1-k}$ 满足该式。当是实小波时，$g_k = (-1)^k h_{1-k}$ 也满足该式。以 Haar 小波为例，两种方法得到的 g_k 是不同的：

$$\begin{aligned} & g_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad g_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ or \quad & g_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad g_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

在《多分辨分析的频域分析》中的很多证明都会用到这个结论，但由于不论 g_k 和 h_k 的关系如何，都不影响我们最后的结论，因此这里就按照 [1] 里的实数小波的简化版本来写。

2 4 小结

本文我们了解了多分辨分析的基本定义和更普遍的扩张方程，通过扩张方程，就可以将 $\mathcal{V}_{j+1}$ 空间的基投影为 $\mathcal{V}_j$ 空间的基。但是，现在描述的各种形式并不是那么容易理解，我们还有几个步骤需要思考，比如 $\mathcal{V}_j$ 空间的函数 $f_j(t)$ 怎么表示为 $\mathcal{V}_{j+1}$ 空间的函数呢？其实很简单：

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l \phi_{(j,l)}(t) \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2l} \phi_{(j+1,m)}(t) \Big)\end{aligned} \tag{二.18}$$

现在还有一些问题，比如 $\mathcal{V}_{j+1}$ 空间的函数 $f_{j+1}(t)$ 如何投影到 $\mathcal{V}_j$ 空间呢？这个问题我们留到后文再讲，其实自己推导也不会很难。

参考文献

[1] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.

[2] 冉启文. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2001.

[3] Ingrid Daubechies. 小波十讲 [M]. 国防工业出版社, 2004.