初识连续小波变换

Dezeming Family

2022 年 4 月 23 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　连续小波变换简介

为什么在我们了解了基本的 Haar 小波空间以后才开始学习连续小波变换，是因为有了前面的基础，现在可以更容易地了解更深层次的思想。

1 1　傅里叶变换回顾

定义傅里叶变换：

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{一.1}$$

注意这里前面的 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 目的是为了保证：

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega} \tag{一.2}$$

1 2　连续小波变换

先给出小波变换的公式。设我们有一个最基本的小波 $\psi(t)$，它需要满足衰减特性和波动特性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < +\infty \tag{一.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \tag{一.4}$$

根据 Equ.一.4，可知函数在实轴上下部分面积相同。其实更多时候我们会施加一个更严格的限制：

$$\widehat{\psi}(0) = 0 \tag{一.5}$$

可以理解为，小波不存在直流分量（这个限制使得证明 Equ.一.4会更容易一些）。

通过尺度伸缩和平移，得到一系列的小波：

$$\psi_{(a,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi(\frac{t-b}{a}) \tag{一.6}$$

回忆一下 Haar 小波：

$$\psi_{(j,k)}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \tag{一.7}$$

应该能看出相似之处与不同。其实 Haar 作为一种正交小波，我们在做分析时会有一些优势，因此 j, k 没有必要取全部实数。我们后面会详细说明。

定义小波变换：

$$W_f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{(a,b)}(t)} dt \tag{一.8}$$

可以看出，将一维信号变为了二维形式。

1 3　逆变换

定义 $\mathcal{C}_\psi$：

$$\mathcal{C}_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \tag{一.9}$$

我们默认 $\widehat{\psi}(0) = 0$：$\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ 内的函数要求绝对值可积，$\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ 内的函数要求平方可积，如果 $\psi(t) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$，则 $\widehat{\psi}(\omega)$ 连续，当且仅当 $\widehat{\psi}(0) = 0$ 时 $\mathcal{C}_\psi < +\infty$。

当 $\mathcal{C}_\psi < +\infty$ 时，称 $\psi(t)$ 为一个小波母函数。

然后，给出逆变换公式：

$$f(t) = \frac{1}{\mathcal{C}_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(a,b)\psi_{(a,b)}(t) \frac{dadb}{a^2} \tag{一.10}$$

有时候，我们会考虑去掉对 a 积分时 $a=0$ 这个点，因此定义符号 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$，于是：

$$f(t) = \frac{1}{\mathcal{C}_\psi} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*} W_f(a,b)\psi_{(a,b)}(t) \frac{dadb}{a^2} \tag{一.11}$$

由于 Equ.一.11中，在逆变换时有一个尺度因子 $\frac{1}{a^2}$，所以可知当 $a \to 0$ 时，$W_f(a,b)$ 对原信号的影响比重更大一些。因此，越接近 0 时的 a 在分析时就越重要（当调整 a 接近 0 时的 $W_f(a,b)$ 值时，逆变换后 $f(t)$ 的变化会比较大）。

二　连续小波分析的简化

2 1　吸收小波

可不可以只分析 $a>0$ 的部分呢？当满足吸收条件：

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \tag{二.1}$$

逆变换就可以写为：

$$f(t) = \frac{2}{\mathcal{C}_\psi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} W_f(a,b)\psi_{(a,b)}(t) db \right] \frac{da}{a^2} \tag{二.2}$$

也就是说，我们不用再去分析 $a<0$ 的部分了。相当于我们对小波进行了一些限制，从而获得更好的特性。

2 2　二进小波

现在再一次升级，我们希望通过某种方式，使得 a 可以被离散化：通过离散的 a 得到的 $W_f(a,b)$ 就能逆变换回 $f(t)$。

对小波附加稳定性条件：

$$0 < A \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B < +\infty \qquad (a.e.\omega \in R) \tag{二.3}$$

由于并不需要对全部 $\omega \in R$ 成立，而是要求“几乎处处成立（表示为 $a.e.\omega \in R$）”，这里面涉及的很多证明都与广义函数和测度论有关，我们暂时不去严格追究。我们定义表示：

$$\psi_{(2^{-j},b)}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j(x-b)) \tag{二.4}$$

此时逆变换公式就是：

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(2^{-j},b)\tau_{(2^{-j},b)}(t) db \tag{二.5}$$

其中，$\tau(t)$ 又叫重构小波（对偶小波，其实就是用于将信号进行小波变换后再重新变换回去的小波），满足：

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{\psi}}(2^{-j}\omega)\widehat{\tau}(2^{-j\omega}) \equiv 1 \qquad (a.e.\omega \in R) \tag{二.6}$$

重构小波一般并不唯一，但可以证明它一定是二进小波，而且某二进小波与其重构小波互为重构小波。

现在，我们可以对离散的 a 进行小波分析，然后变换回原始信号。只是这个时候多了一个重构小波，虽然有点令人讨厌，但也无伤大雅。

2 3 正交小波

既然 a 可以离散化，那么 b 可不可以离散化呢？Meyer 证明了可以。

若小波函数 $\psi(t)$：

$$\{\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k), (j,k) \in \mathbb{Z}^2\} \tag{二.7}$$

上式构成 $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ 的标准正交基，则逆变换就可以写为：

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{(j,k)}\psi_{(j,k)}(t) \tag{二.8}$$

$$\alpha_{(j,k)} = \langle f(t), \psi_{(j,k)}(t)\rangle \tag{二.9}$$

我们再回忆一下一开始的小波：

$$\psi_{(a,b)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a}) \tag{二.10}$$

正交小波则相当于 $a = 2^{-j}$，$b = 2^{-j}k$，也就是说，我们只需要分析 $W_f(a,b)$ 中的 $W_f(2^{-j}, 2^{-j}k)$ 这些点，就可以相当于对整个信号进行分析。

值得一提的是，正交小波的优良性质，甚至不需要重构小波，而且将连续信号的分析转化到了离散点的分析上来。

2 4 Haar 正交小波

我们现在再来看 Haar 正交小波：

$$\psi_{(j,k)}(t) = \frac{1}{2^{-j/2}}\psi(\frac{t-2^{-j}k}{2^{-j}}) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) \tag{二.11}$$

构成 $\mathcal{W}_j$ 空间的正交 Haar 小波：

$$\mathcal{W}_j = span\{2^{j/2}\psi(2^j t - k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \tag{二.12}$$

并且：

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_j = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \tag{二.13}$$

我们在前面学习的 Haar 小波变换相当于我们分别把信号投影到不同的 $\mathcal{W}_j$ 空间，得到尺度表示和细节表示（$\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j$）；连续小波变换则需要计算出 $W_f(a,b)$；现在，对于正交小波，我们则需要计算得到一系列的 Equ.二.9中的 $\alpha_{(j,k)}$。由 $\alpha_{(j,k)}$ 的公式：

$$\alpha_{(j,k)} = \langle f(t), \psi_{(j,k)}(t)\rangle \tag{二.14}$$

在做 Haar 小波变换时，使用投影方法：

$$P_{(j,k)}(f(t)) = \langle f(t), \psi_{(j,k)}(t)\rangle\psi_{(j,k)}(t) = \alpha_{(j,k)}\psi_{(j,k)}(t) \tag{二.15}$$

也就是说投影到不同的小波空间 $\mathcal{W}_j$ 后，得到用 $\alpha_{(j,k)}$ 倍乘再位移的小波构成的信号。

三 总结

至此，基本的连续小波变换的内容就结束了。尽管后面我们可以对小波变换的离散点进行分析，但我倾向于仍然称其为连续小波变换（只是相当于从连续的 $W_f(a,b)$ 中，我们可以只分析其中离散的一些点）。

下一部分内容，我们从 Haar 小波变换来分析和理解离散小波变换。等离散小波变换结束以后，我们就可以开始进行多分辨分析了。

参考文献

[1] Ingrid Daubechies. 小波十讲 [M]. 国防工业出版社, 2004.

[2] 冉启文. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2001.