多分辨分析与空间投影

Dezeming Family

2022 年 4 月 26 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　$\mathcal{V}_{j+1}$ 与 $\mathcal{V}_j$ 的空间投影

1 1　将 $\mathcal{V}_{j+1}$ 空间的函数投影到 $\mathcal{V}_j$

设有一个函数 $f_{j+1}(t) \in \mathcal{V}_{j+1}$，把 $f_{j+1}(t)$ 投影到 $\mathcal{V}_j$ 空间得到函数 $f_j(t) \in \mathcal{V}_j$，表示为：

$$\begin{aligned} f_{j+1}(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi_{(j+1,k)}(t) \\ f_j(t) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l \phi_{(j,l)}(t) \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned} b_l &= \langle f_{j+1}(t), \phi_{(j,l)}(t) \rangle \\ &= \langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi_{(j+1,k)}(t), \phi_{(j,l)}(t) \rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \langle \phi_{(j+1,k)}(t), \phi_{(j,l)}(t) \rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \overline{h}_{k-2l} \end{aligned} \tag{一.1}$$

注意这里面的共轭，这是因为：

$$\begin{aligned} \langle \phi_{(j,l)}(t), \phi_{(j+1,k)}(t) \rangle &= \langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2l} \phi_{(j+1,m)}(t), \phi_{(j+1,k)}(t) \rangle \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2l} \langle \phi_{(j+1,m)}(t), \phi_{(j+1,k)}(t) \rangle = h_{k-2l} \end{aligned} \tag{一.2}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_{(j+1,k)}(t), \phi_{(j,l)}(t) \rangle &= \langle \phi_{(j+1,k)}(t), \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_{m-2l} \phi_{(j+1,m)}(t) \rangle \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{h}_{m-2l} \langle \phi_{(j+1,k)}(t), \phi_{(j+1,m)}(t) \rangle = \overline{h}_{k-2l} \end{aligned} \tag{一.3}$$

我们用矩阵来表示一下这个过程，思考方式如下：

$$\begin{aligned} b_0 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \overline{h}_k \\ b_1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \overline{h}_{k-2} \\ b_{-1} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \overline{h}_{k+2} \end{aligned}$$

于是：

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & \\ \cdots & \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \overline{h}_4 & \overline{h}_5 & \overline{h}_6 & \overline{h}_7 & \cdots \\ \cdots & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \overline{h}_4 & \overline{h}_5 & \cdots \\ \cdots & \overline{h}_{-3} & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \overline{h}_3 & \cdots \\ \cdots & \overline{h}_{-5} & \overline{h}_{-4} & \overline{h}_{-3} & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_1 & \cdots \\ \cdots & \overline{h}_{-7} & \overline{h}_{-6} & \overline{h}_{-5} & \overline{h}_{-4} & \overline{h}_{-3} & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \cdots \\ & & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{-2} \\ a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ b_{-2} \\ b_{-1} \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{一.4}$$

简写为：

$$\mathbf{b} = \mathcal{H}^* \cdot \mathbf{a} \tag{一.5}$$

$$\mathcal{H}^* = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ \cdots & & & \longleftarrow & & & \\ \cdots & \overline{h}_{-2} & \overline{h}_{-1} & \overline{h}_0 & \overline{h}_1 & \overline{h}_2 & \cdots \\ \cdots & & & \longrightarrow & & & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \longleftarrow \\ \mathbf{h}^* \\ \longrightarrow \end{bmatrix} \tag{一.6}$$

注意 $\mathcal{H}$：

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \upuparrows & \mathbf{h} & \downdownarrows \end{bmatrix} \tag{一.7}$$

这个矩阵是一个正交矩阵（存在复数的情况下就是酉矩阵），因为：

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k h_{k-2l} = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \\ &\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^2 = 1 \end{aligned} \tag{一.8}$$

这说明每一行与其他行之间都是相互正交的，而每一行的模都是 1，满足正交性。

也就是说，一个 $\mathcal{V}_{j+1}$ 空间的函数 $f_{j+1}(t)$ 在标准正交基下系数表示为 $a_k, k \in \mathbb{Z}$，将 $\mathcal{H}^*$ 乘以系数，就会得到它在 $\mathcal{V}_j$ 空间的投影。再乘以一次 $\mathcal{H}^*$，就能得到它在 $\mathcal{V}_{j-1}$ 空间的投影。

1 2 Haar 投影矩阵

对于 Haar 小波：

$$h_k = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & k = 0, 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{一.9}$$

所以：

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & \\ \cdots & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{-2} \\ a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ b_{-2} \\ b_{-1} \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{一.10}$$

二 $\mathcal{V}_{j+1}$ 与 $\mathcal{W}_j$ 的空间投影

2 1 将 $\mathcal{V}_{j+1}$ 空间的函数投影到 $\mathcal{W}_j$

设有一个函数 $f_{j+1}(t) \in \mathcal{V}_{j+1}$，把 $f_{j+1}(t)$ 投影到 $\mathcal{W}_j$ 空间得到函数 $w_j(t) \in \mathcal{W}_j$，表示为：

$$\begin{aligned} f_{j+1}(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi_{(j+1,k)}(t) \\ w_j(t) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l \psi_{(j,l)}(t) \end{aligned}$$

其中：

$$
\begin{aligned}
c_l &= \left\langle f_{j+1}(t), \psi_{(j,l)}(t) \right\rangle & (二.1)\\
&= \Big\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi_{(j+1,k)}(t), \psi_{(j,l)}(t) \Big\rangle \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \left\langle \phi_{(j+1,k)}(t), \psi_{(j,l)}(t) \right\rangle \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \overline{g}_{k-2l} & (二.2)
\end{aligned}
$$

注意最后一行，是因为：

$$
\begin{aligned}
\psi_{(j,l)}(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_{k-2l} \phi_{(j+1,k)}(t) \\
\left\langle \phi_{(j+1,k)}(t), \psi_{(j,l)}(t) \right\rangle &= \Big\langle \phi_{(j+1,k)}(t), \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_{m-2l} \phi_{(j+1,m)}(t) \Big\rangle \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{g}_{m-2l} \left\langle \phi_{(j+1,k)}(t), \phi_{(j+1,m)}(t) \right\rangle \\
&= \overline{g}_{k-2l} & (二.3)
\end{aligned}
$$

写成投影矩阵以后就是：

$$
\begin{bmatrix}
\ddots & \ddots & & & & & & \\
\cdots & \overline{g}_1 & \overline{g}_2 & \overline{g}_3 & \overline{g}_4 & \overline{g}_5 & \overline{g}_6 & \overline{g}_7 & \cdots \\
\cdots & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_1 & \overline{g}_2 & \overline{g}_3 & \overline{g}_4 & \overline{g}_5 & \cdots \\
\cdots & \overline{g}_{-3} & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_1 & \overline{g}_2 & \overline{g}_3 & \cdots \\
\cdots & \overline{g}_{-5} & \overline{g}_{-4} & \overline{g}_{-3} & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_1 & \cdots \\
\cdots & \overline{g}_{-7} & \overline{g}_{-6} & \overline{g}_{-5} & \overline{g}_{-4} & \overline{g}_{-3} & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \cdots \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \vdots \\ a_{-2} \\ a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \vdots \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix}
\tag{二.4}
$$

简写为：

$$
\mathbf{c} = \mathcal{G}^* \cdot \mathbf{a} \tag{二.5}
$$

$$
\mathcal{G}^* = \begin{bmatrix}
\ddots & & & & & & \\
\cdots & & & \longleftarrow & & & \\
\cdots & \overline{g}_{-2} & \overline{g}_{-1} & \overline{g}_0 & \overline{g}_1 & \overline{g}_2 & \cdots \\
\cdots & & & \longrightarrow & & & \\
 & & & & & & \ddots
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \longleftarrow \\ \mathbf{g}^* \\ \longrightarrow \end{bmatrix} \tag{二.6}
$$

注意 $\mathcal{G}$：

$$
\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \upuparrows & \mathbf{g} & \downdownarrows \end{bmatrix} \tag{二.7}
$$

这个矩阵同样也是一个正交矩阵（存在复数的情况下就是酉矩阵）。

2 2 Haar 投影矩阵

对于 Haar 小波：

$$
g_k = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}, & k = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & k = 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{二.8}
$$

所以：

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & \\ \cdots & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{-2} \\ a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{二.9}$$

三　重建函数

3 1　重建函数与矩阵表示

由于：

$$\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j \tag{三.1}$$

而注意，其实 $\{\phi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 和 $\{\psi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 共同构成 $\mathcal{V}_{j+1}$ 的一组标准正交基，所以可以用这组标准正交基来重新表示 $\mathcal{V}_{j+1}$ 内的函数，也就相当于把 $f_{j+1}(t) \in \mathcal{V}_{j+1}$ 投影到两个子空间：

$$\begin{aligned} f_{j+1}(t) &= f_j(t) + g_j(t) \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l \phi_{(j,l)}(t) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \psi_{(j,m)}(t) \end{aligned} \tag{三.2}$$

我们可以推导出：

$$\begin{aligned} f_{j+1}(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \phi_{(j+1,k)}(t) \\ a_k &= \big\langle f_{j+1}(t), \phi_{(j+1,k)}(t) \big\rangle \\ &= \Big\langle \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l \phi_{(j,l)}(t) + \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \psi_{(j,m)}(t), \phi_{(j+1,k)}(t) \Big\rangle \\ &= \Big\langle \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l \phi_{(j,l)}(t), \phi_{(j+1,k)}(t) \Big\rangle + \Big\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \psi_{(j,m)}(t), \phi_{(j+1,k)}(t) \Big\rangle \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l \big\langle \phi_{(j,l)}(t), \phi_{(j+1,k)}(t) \big\rangle + \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \big\langle \psi_{(j,m)}(t), \phi_{(j+1,k)}(t) \big\rangle \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l h_{k-2l} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m g_{k-2m} \end{aligned} \tag{三.3}$$

写成矩阵形式（分成两个矩阵）：

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & \\ \cdots & h_4 & h_2 & h_0 & h_{-2} & h_{-4} & h_{-6} & h_{-8} & \cdots \\ \cdots & h_5 & h_3 & h_1 & h_{-1} & h_{-3} & h_{-5} & h_{-7} & \cdots \\ \cdots & h_6 & h_4 & h_2 & h_0 & h_{-2} & h_{-4} & h_{-6} & \cdots \\ \cdots & h_7 & h_5 & h_3 & h_1 & h_{-1} & h_{-3} & h_{-5} & \cdots \\ \cdots & h_8 & h_6 & h_4 & h_2 & h_0 & h_{-2} & h_{-4} & \cdots \\ & & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vdots \\ b_{-2} \\ b_{-1} \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathcal{H}\mathbf{b} \tag{三.4}$$

$$
\begin{bmatrix}
\ddots & \ddots & & & & & & & \\
\cdots & g_4 & g_2 & g_0 & g_{-2} & g_{-4} & g_{-6} & g_{-8} & \cdots \\
\cdots & g_5 & g_3 & g_1 & g_{-1} & g_{-3} & g_{-5} & g_{-7} & \cdots \\
\cdots & g_6 & g_4 & g_2 & g_0 & g_{-2} & g_{-4} & g_{-6} & \cdots \\
\cdots & g_7 & g_5 & g_3 & g_1 & g_{-1} & g_{-3} & g_{-5} & \cdots \\
\cdots & g_8 & g_6 & g_4 & g_2 & g_0 & g_{-2} & g_{-4} & \cdots \\
& & & & & & & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
\vdots \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots
\end{bmatrix}
= \mathcal{G}\mathbf{c} \tag{三.5}
$$

把两个矩阵合并在一起，就可以写为：

$$
\mathbf{a} = \left[\begin{array}{c:c} \mathcal{H} & \mathcal{G} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \hdashline \mathbf{c} \end{array} \right] \tag{三.6}
$$

我们把前面的分解式也用矩阵的形式写出来：

$$
\left[\begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \hdashline \mathbf{c} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathcal{H}^* \\ \hdashline \mathcal{G}^* \end{array} \right] \mathbf{a} \tag{三.7}
$$

虽然 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}$ 都是 $\infty \times \infty$ 的矩阵，但从感觉上，其实应该是 $\infty \times \frac{\infty}{2}$ 大小的矩阵，拼在一起得到 $\infty \times \infty$ 的正交（酉）矩阵。

3 2　小结

不知读者有没有发现一个问题，虽然我们在做逐级投影的过程都是使用同一个矩阵三.7，但对于离散信号来说，数据会越来越少，例如 $\mathcal{V}_5$ 空间的函数 $f_5(t)$ 为：

$$
f_5(t) = \sum_{k=0}^{31} a_k \phi_{(5,k)}(t) \tag{三.8}
$$

投影到 $\mathcal{V}_4$ 空间以后，系数就变为了 16 个：

$$
f_4(t) = \sum_{k=0}^{15} b_k \phi_{(4,k)}(t) \tag{三.9}
$$

此时的 $\mathcal{H}$ 矩阵就需要“变小”了。当然，离散情况下还有需要其他要注意的地方，这里只是简单埋个伏笔。

后文将从频率的角度来理解多分辨分析，频率角度对理解小波和推导一些重要的性质都非常关键。

参考文献

[1] Ruch D K , Fleet P V . Wavelet Theory: An Elementary Approach with Application[M]. John Wiley & Sons, 2009.

[2] 冉启文. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用 [M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2001.

[3] Ingrid Daubechies. 小波十讲 [M]. 国防工业出版社, 2004.