链式法则与隐式微分

Dezeming Family

2021 年 1 月 1 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一 链式法则的引入

链式法则是微积分中最基础和最重要的法则之一。

设符号：

$$F = f \circ g = f(g(x)) \tag{一.1}$$

相当于把一个变量 x 对应到函数 $g(x)$，然后把 $g(x)$ 再对应到 $f(x)$ 上。例如：

$$g(x) = 2x \quad f(x) = x^2 \tag{一.2}$$

$$f(g(x)) = (2x)^2 = 4x^2 \tag{一.3}$$

我们使用如下的表示：

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \tag{一.4}$$

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) \tag{一.5}$$

这样我们就可以得到：

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} && (一.6)\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} && (一.7)\\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} && (一.8)\\
&= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} && (一.9)
\end{aligned}$$

上式的倒数第二步是由于当 $\Delta x \to 0$ 时 $\Delta u \to 0$。

因此我们得到链式法则：

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{一.10}$$

我们以一个函数为例：

$$F(x) = \sqrt{x^2+1} \tag{一.11}$$

$$\begin{cases} f(u) = \sqrt{u} \quad u = g(x) = x^2 + 1 \\ f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \\ g'(x) = 2x \end{cases} \tag{一.12}$$

$$\Longleftrightarrow F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \tag{一.13}$$

二　链式法则的严格证明

上面的链式法则并不算是严格的证明（参见《线性近似于微分》的解释），这里给出严格的证明方法[1]。

当 x 从 a 变化到 $a + \Delta x$ 后，我们就定义 y 的变化为：

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) \tag{二.1}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) \tag{二.2}$$

我们定义微商和导数之间的差值：

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \Longleftrightarrow \Delta y = f'(a)\Delta x + \epsilon \Delta x \tag{二.3}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \right) = 0 \tag{二.4}$$

如果定义 $\Delta x = 0$ 时 $\epsilon = 0$，则 ϵ 就变为了 Δx 的连续函数。

我们设 $u = g(x)$ 在 a 点可微，设 $y = f(u)$ 在 $b = g(a)$ 点可微：

$$\Delta u = g'(a)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = \left[g'(a) + \epsilon_1\right]\Delta x \tag{二.5}$$

$$\Delta y = f'(b)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = \left[f'(b) + \epsilon_2\right]\Delta u \tag{二.6}$$

$$= \left[f'(b) + \epsilon_2\right]\left[g'(a) + \epsilon_1\right]\Delta x \tag{二.7}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[f'(b) + \epsilon_2\right]\left[g'(a) + \epsilon_1\right] \tag{二.8}$$

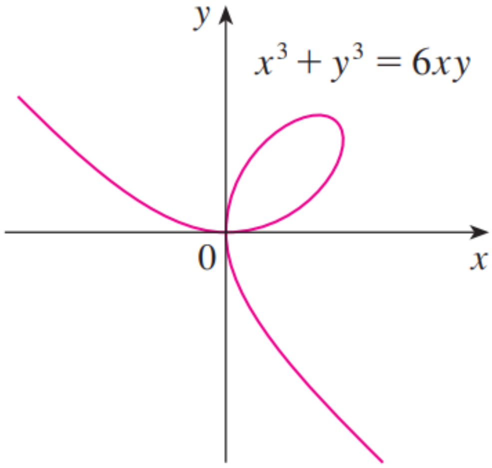
当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta u \to 0$，此时 $\epsilon_1 \to 0$ 且 $\epsilon_2 \to 0$，因此：

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(b) + \epsilon_2\right]\left[g'(a) + \epsilon_1\right] \tag{二.9}$$

$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a) \tag{二.10}$$

三　隐函数

有些人可能并不是很理解隐函数，我们需要假设一个函数存在，设为 $y = f(x)$，该函数和变量 x 满足一定的函数关系：



我们可以把这个曲线写为：

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x) \tag{三.1}$$

我们可以使用链式法则，对两边进行求导：

$$3x^2 + 3[f(x)]^2 f'(x) = 6xf'(x) + 6f(x) \tag{三.2}$$

$$x^2 + [f(x)]^2 f'(x) = 2xf'(x) + 2f(x) \tag{三.3}$$

$$f'(x) = \frac{2f(x) - x^2}{[f(x)]^2 - 2x} \tag{三.4}$$

我们还可以在上面解出的 $f'(x)$ 的基础上求 $f''(x)$。

参考文献

[1] James Stewart. Calculus, Eighth Edition. 2016.