向量组和矩阵的正交性

Dezeming Family

2021 年 7 月 21 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

20210721：完成第一版。

目录

一　向量组的正交性

设有两个向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,...,a_m)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,...,b_m)$，它们之间的内积 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+...+a_mb_m$。当 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ 时，我们就称这两个向量正交。

当我们有一组向量 $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},...,\boldsymbol{a_n}$，这组向量就可以通过线性组合来生成很多向量，这些向量就构成一个向量空间，而如果这组初始的向量是线性无关的向量组（即任意一个向量无法通过其他向量线性组合得到）时，那这组初始向量就是这个向量空间的基。

假如我们已经有一组基了，但是这组基并不互相正交，我们希望得到一组相互正交的基，因此我们就可以使用“施密特正交化”的方法来将这组基转化为正交基，甚至再将正交基单位化为标准正交基。因为“施密特正交化”的过程较为简单，套用公式即可，这里就不再介绍了。

二　正交矩阵

如果一个矩阵 A 满足 $A^TA=E$ 则称这个矩阵为正交矩阵。

由于矩阵相乘以后的行列式与矩阵的行列式相乘，即 $|AB|=|A||B|$，所以正交矩阵 $|A^TA|=|A^T||A|=|A||A|=1$，即 $|A|=\pm1$。如果 A 是正交矩阵，那么 A^T、A^{-1} 也是正交矩阵。如果 A 和 B 都是 n 阶正交矩阵，那么：

$$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^T(A^TA)B=E \tag{二.1}$$

方阵 A 是正交矩阵的充要条件是，A 的行向量组以及列向量组是单位正交向量组，我们证明一下。首先证明列向量组的情况，设 A 的列向量为 $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},...,\boldsymbol{a_n}$，因此：

$$A^TA=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a_1}\\ \boldsymbol{a_2}\\ ...\\ \boldsymbol{a_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & ... & \boldsymbol{a_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a_1^Ta_1} & \boldsymbol{a_1^Ta_2} & ... & \boldsymbol{a_1^Ta_n}\\ \boldsymbol{a_2^Ta_1} & \boldsymbol{a_2^Ta_2} & ... & \boldsymbol{a_2^Ta_n}\\ ... & & & \\ \boldsymbol{a_n^Ta_1} & \boldsymbol{a_n^Ta_2} & ... & \boldsymbol{a_n^Ta_n}\end{bmatrix} \tag{二.2}$$

所以我们可以得到，$A^TA=E$ 当且仅当：

$$\boldsymbol{a_i^T}\boldsymbol{a_j}=(\boldsymbol{a_i},\boldsymbol{a_j})=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases} \tag{二.3}$$

因此上述定理成立。

我们再证明行向量组，其实原理差不多，因为 A 的行向量组是单位正交向量组，所以 A^T 的列向量组是单位正交向量组，因此 A^T 是正交矩阵，因此 $(A^T)^T=A$ 也是正交矩阵（因为 A^T 列向量组单位正交，所以 A 的行向量组单位正交）。

参考文献

[1] 吴臻, 刘建亚. 线性代数 [M]. 山东大学出版社, 2004.