矩阵与方程组的解

Dezeming Family

2021 年 5 月 12 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

20210513：完成第一版。

20210720：增加了齐次线性方程组基础解系的描述。

目录

一 介绍

感觉很久没有写过与矩阵有关的东西了，最近做线性变换分析时，遇到了非齐次方程组求解的问题，虽然是属于最基础的内容（大部分人大学一年级就学习了，很多人高中也有接触过），但仔细想来也挺有意思，有时候感觉回顾以前的知识，会有一种耳目一新的感觉，于是决定动手写一写。

对于线性方程组，我们可以写为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，以 4 元 1 次方程组为例：

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3+a_{1,4}x_4=b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3+a_{2,4}x_4=b_2 \\ a_{3,1}x_1+a_{3,2}x_2+a_{3,3}x_3+a_{3,4}x_4=b_3 \end{cases} \tag{一.1}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix} \tag{一.2}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{一.3}$$

为了方便描述，我们称 $\boldsymbol{x}$ 中的元素为未知数（待求解的值），设 I 为单位矩阵。

二　矩阵的秩

首先我们先简单回顾矩阵的秩（记录为 r）的意义。

把矩阵的每一行当成一个行向量 $\boldsymbol{ah}_i$，每一列当成一个列向量 $\boldsymbol{av}_i$。

矩阵某一行的各个元素分别加上另一行的对应列的各个元素乘以某值，属于矩阵的初等变换，比如：

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \end{bmatrix} \tag{二.1}$$

把第二行的值乘以 2 加到第一行上，得到：

$$ah_1 \leftarrow (\boldsymbol{ah}_1 + -0.5 * \boldsymbol{ah}_2) = \tag{二.2}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} - 0.5a_{2,1} & a_{1,2} - 0.5a_{2,2} & a_{1,3} - 0.5a_{2,3} & a_{1,4} - 0.5a_{2,4} \end{bmatrix} \tag{二.3}$$

同时，一个矩阵的两行位置互换也是属于初等变换。

一个 4×4 矩阵经过变换以后，就可以得到阶梯矩阵的形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{bmatrix} \tag{二.4}$$

该矩阵的对角线以下都是 0，对角线上 0 不能出现在非 0 元素的上一行。当然如上式，若 $a_{4,4}$ 也是 0，同样叫阶梯矩阵。如果您经过初等变换得到上式，且 $a_{3,3}$ 也为 0，则我们可以用第 3 行把第 4 行消除为全 0 行，得到阶梯矩阵。

矩阵的初等变换和我们在解方程组的时候，方程组互消的方式是一样的。注意对于 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 我们需要把 $[A\boldsymbol{b}]$ 作为一个矩阵进行初等变换互消，然后就可以得到方程组的解了（大家回顾小学的时候学习的内容）。这个 $[A\boldsymbol{b}]$ 矩阵我们称为增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & b_3 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & b_4 \end{bmatrix} \tag{二.5}$$

一个矩阵变为阶梯矩阵以后，非全 0 行的数量叫做矩阵的秩。

需要注意的是，矩阵行秩等于列秩，这个定理大家可以去网上自行查阅证明方法。

三　齐次线性方程组

基本介绍

当 $\boldsymbol{b}$ 向量里面所有元素都是 0 的时候，称这个方程组为齐次线性方程组。

当 r=n 时，原方程组仅有零解；当 r<n 时，有无穷多个解（从而有非零解）。

我们首先思考方程组中，3 个方程 4 个未知数，说明未知数的值没有被方程限制得那么“死”，表现为 r<4，因此就可以有无穷多个解了。

当有 5 个方程 4 个未知数时，根据化简方法，可以将矩阵 A 化简为阶梯矩阵，如果 $r = 3 < 4$，则最后化简后的矩阵 A 最后两行就是全 0 行，最后两行对未知数也没有任何限制，所以矩阵仍然有无穷多个解。

但是当 $r = 4$ 时，情况就不一样了，我们化为阶梯矩阵后，形式如下：

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \end{bmatrix} \tag{三.1}$$

因此可以得到 $x_4=0$，然后依次得到其他未知数结果都是 0。即只存在全 0 解。注意上式的 b_{11} 表示经过初等变换以后的元素值。

由于矩阵行秩等于列秩，所以四个未知数，方程矩阵 A 的列秩不可能大于 4，因此行秩也不可能大于 4。

基础解系（拓展知识）

虽然对于 $r<n$ 的齐次方程组可以有无穷多个解（设为 ξ），但这些解构成一个子空间，我们找到这个空间的一组基，即 $\xi^1,\xi^2,...,\xi^m$，它们互相线性无关，且它们任意线性组合可以表示成其他的任何解，我们称这组基为其次线性方程组的基础解系。

定理：当矩阵的秩 $r<n$ 时，基础解析的向量个数为 $n-r$。我们可以将矩阵化为这种形式：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & a_{1,r+1} & a_{1,r+2} & ... & a_{1,n} \\ & 1 & & a_{2,r+1} & a_{1,r+2} & ... & a_{1,n} \\ & & ... & & & ... & \\ & & 1 & a_{r,r+1} & a_{r,r+2} & ... & a_{r,n} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & & & & ... & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_r \\ x_{r+1} \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \tag{三.2}$$

将上面的式子写出来以后，就可以得到 $x_1,...,x_r$ 使用 $x_{r+1},...,x_n$ 的表示，我们将 $x_{r+1},...,x_n$ 表示为单独的一个向量：

$$A=\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \tag{三.3}$$

该向量可以取：

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix},...,\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix} \tag{三.4}$$

$x_{r+1},...,x_n$ 选取某个值以后，$x_1,...,x_r$ 的值就是确定的了，这样就说明构成基础解系的向量一共是 $n-r$ 个。

四　非齐次线性方程组

当 $\boldsymbol{b}$ 向量里面有至少一个元素不为 0 的时候，称这个方程组为非齐次线性方程组。

首先对于 4 个未知数 3 个方程而言，非齐次线性方程组肯定是有解的，而且有无穷多个解，我们不考虑这种情况。我们现在只研究 n 个未知数大于 n 个方程的情况，可以表示如下：

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{四.1}$$

只有一个解

我们构造增广矩阵 $[A\boldsymbol{b}]$，如果我们对增广矩阵进行初等变换后，得到这种形式的阶梯矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & b_{11} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & b_{12} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} & b_{14} \end{bmatrix} \tag{四.2}$$

注意 $_{4,4}$ 和 b_{14} 都不为 0，对角线元素也都不为 0。我们可以根据 $a_{4,4}x_4 = b_{14}$ 来解得 x_4，之后依次解出其他未知数，这个时候的解是唯一的。

没有解

但如果对增广矩阵变换后得到的阶梯矩阵为这种形式：

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & b_{11} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & b_{12} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{14} \end{bmatrix} \tag{四.3}$$

且 b_{14} 不为 0，这个时候就没有解了：$0 \cdot x_4 = b_{14}$。

因此我们可知，必须要 A 的秩等于增广矩阵 $[A\boldsymbol{b}]$ 的秩，才能得到解，否则非齐次线性方程组就是无解的。

无穷多个解

当增广矩阵变换后得到这种形式：

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & b_{11} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & b_{12} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{四.4}$$

那么这个时候就有无穷多个解了，$a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 = b_{13}$ 可以获得任意种组合。

有的书上表示为“非齐次线性方程组的通解 = 齐次线性方程组的通解 + 非齐次线性方程组的一个特解”这种形式，即设 $A\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{0}$，$A\boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{b}$，得到非齐次线性方程组的通解为：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_a + \boldsymbol{x}_b$。

参考文献

[1] 吴臻, 刘建亚. 线性代数 [M]. 山东大学出版社, 2004.