三次样条曲线

Dezeming Family

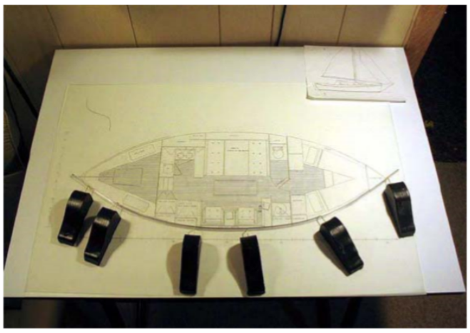
2022 年 3 月 9 日

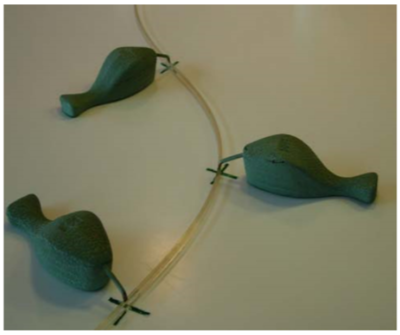
DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

目录

一　样条函数的引入与建模

样条是一种有弹性的木质材料 [2, 3]，在制图时，将样条上的一些点固定（使用压铁），其他部分自然弯曲，这样就可以绘制出曲线。





根据材料力学建模（贝努力-欧拉方程），设样条的弹性模量为 E，几何惯性矩为 I，则样条的弯矩 $M(x)$（使得曲线弯曲所需要的力矩）就可以表示为：

$$M(x) = EIk(x) = EI\frac{y''(x)}{\left(1+(y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{一.1}$$

其中，$k(x)$ 表示曲线曲率（曲线比较平坦的地方，密切圆半径大，曲率小 [4]）。

当我们假设弯曲角度比较小时，也就是 $y'(x) \ll 1$（弯曲角度小于 45 度），则可以近似为：

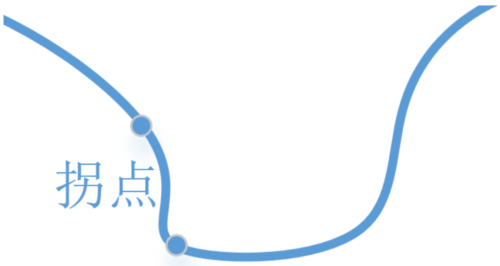
$$M(x) \approx EIk(x) = EIy''(x) \tag{一.2}$$

由于两个固定点之间没有其他外力，则弯矩就是一个一次式（参考材料力学书籍 [5]）：

$$M(x) = ax + b \tag{一.3}$$

因此 $y(x)$ 就是一个三次函数，而样条曲线可以理解为分段三次函数。

三次多项式的好处是可有拐点（二次只是一个抛物线，无法在插值点之间构成拐点；次数太高，则会带来过多的拐点，很不稳定，计算也会带来很大误差）：



二　样条函数求解条件

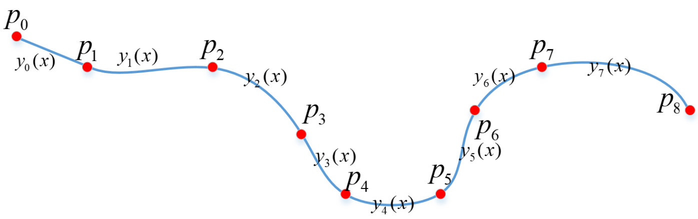
由于每段都是一个三次多项式，所以有 4 个变量：

$$y_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \tag{二.1}$$

$$\tag{二.2}$$

对于 $n+1$ 个型值点，一共有 n 段，则总共就是 $4n$ 个变量。

我们希望函数的 0 阶连续，也就是说希望每段函数之间没有断点；同时希望导数连续；还希望二阶导数连续。因此对于每个除了边界点的型值点（一共 $n-1$ 个），一共有 3 个条件。如下图：



对于其中一个点 p_4（设横坐标为 x_{p_4}，纵坐标为 y_{p_4}），条件可以描述为：

$$\begin{aligned} &y_3(x_{p_4}) = y_4(x_{p_4}) = y_{p_4} \\ &y_3'(x_{p_4}) = y_4'(x_{p_4}) \\ &y_3''(x_{p_4}) = y_4''(x_{p_4}) \end{aligned} \tag{二.3}$$

对于 $n-1$ 个点总共就是 $3n-3$ 个条件。再加上 $n+1$ 个型值点位置构成的条件，共 $4n-2$ 个条件。此时如果求解，就会出现无穷多个解（条件数 $<$ 参数数）。

为了保证足够多的条件，我们会补充两个边界条件，即给端点处添加条件，比如给两端设二阶导都是 0（这时称为自然边界条件）；或者如果我们知道两端的一阶导，也可以进行设置。

三 样条函数求解方法

我们设：

$$M_i = y''(x_{p_i}) \tag{三.1}$$

即 p_i 处的两阶导。

因此：

$$y_i''(x_{p_i}) = M_i \tag{三.2}$$

$$y_i''(x_{p_{i+1}}) = M_{i+1} = y_{i+1}''(x_{p_{i+1}}) \tag{三.3}$$

由于 y_i 是 p_i 到 p_{i+1} 之间的三次多项式，所以二阶导就是一次线性函数（在两点间就是一条线段），又由于这个线段的两个端点已知（即 M_i 和 M_{i+1}），所以可以写为：

$$y_i''(x) = \frac{M_i(x_{p_{i+1}} - x)}{x_{p_{i+1}} - x_{p_i}} + \frac{M_{i+1}(x - x_{p_i})}{x_{p_{i+1}} - x_{p_i}} \tag{三.4}$$

我们可以将 y_i'' 进行积分，积分两次来得到 y_i 的表达式。为了方便表示，我们设 $h_i = x_{p_{i+1}} - x_{p_i}$：

$$y_i(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x_{p_{i+1}} - x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x - x_{p_i})^3 + C(x - x_{p_i}) + D(x_{p_{i+1}} - x) \tag{三.5}$$

但是不定积分会引入一些常数：所以需要两个条件 $y_{p_i} = y_i(x_{p_i})$ 和 $y_{p_{i+1}} = y_i(x_{p_{i+1}})$ 来得到 y_i 的表达式，该表达式唯一不可知的参数就是 M_i 与 M_{i+1}：

$$\begin{aligned} C &= (\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1}h_i}{6}) \\ D &= (\frac{y_i}{h_i} - \frac{M_i h_i}{6}) \end{aligned} \tag{三.6}$$

我们如果有了 M_i 与 M_{i+1}，就可以给定任意 $x \in (x_{p_i}, x_{p_{i+1}})$ 得到纵坐标值。

我们根据 $y'(x)$ 的连续性来确定 M 参数，由于 $y_{i-1}'(x_{p_i}) = y_i'(x_{p_i})$，可以对 $y_i(x)$ 进行求导：

$$y_i'(x) = -\frac{M_i}{2h_i}(x_{p_{i+1}} - x)^2 + \frac{M_{i+1}}{2h_i}(x - x_{p_i})^2 + (\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1}h_i}{6}) - (\frac{y_i}{h_i} - \frac{M_i h_i}{6}) \tag{三.7}$$

分别得到 $y_i'(x_{p_i})$ 与 $y_i'(x_{p_{i+1}})$：

$$\begin{aligned} y_i'(x_{p_i}) &= -\frac{M_i h_i}{2} + (\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1}h_i}{6}) - (\frac{y_i}{h_i} - \frac{M_i h_i}{6}) \\ &= -\frac{M_i h_i}{3} - \frac{M_{i+1}h_i}{6} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i} \end{aligned} \tag{三.8}$$

$$\begin{aligned} y_i'(x_{p_{i+1}}) &= \frac{M_{i+1}h_i}{2} + (\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{M_{i+1}h_i}{6}) - (\frac{y_i}{h_i} - \frac{M_i h_i}{6}) \\ &= \frac{M_{i+1}h_i}{3} + \frac{M_i h_i}{6} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i} \end{aligned} \tag{三.9}$$

对于式子三.9，我们可以转写为 $y'_{i-1}(x_{p_i})$ 的形式，得到：

$$\begin{aligned} y'_{i-1}(x_{p_i}) &= \frac{M_i h_{i-1}}{2} + (\frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{M_i h_{i-1}}{6}) - (\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{M_{i-1} h_{i-1}}{6}) \\ &= \frac{M_i h_{i-1}}{3} + \frac{M_{i-1} h_{i-1}}{6} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}} \end{aligned} \tag{三.10}$$

联立化简，就能得到：

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})M_i + h_i M_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \tag{三.11}$$

该等式只对中间点成立，并不包括初始点 x_{p_0} 和 x_{p_n}，于是，我们取一个边界条件，设 $M_0 = M_n = 0$，得到：

$$\begin{aligned} &2(h_1 + h_0)M_1 + h_1 M_2 = \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0) \\ &h_{n-2}M_{n-2} + 2(h_{n-1} + h_{n-2})M_{n-1} = \frac{6}{h_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) - \frac{6}{h_{n-2}}(y_{n-1} - y_{n-2}) \end{aligned} \tag{三.12}$$

我们首先设：

$$\begin{aligned} h_i &= x_{i+1} - x_i \\ u_i &= 2(h_i + h_{i-1}) \\ b_i &= \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) \\ v_i &= b_i - b_{i-1} \end{aligned} \tag{三.13}$$

我们可以把整个求解式写成一个矩阵的形式，

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \tag{三.14}$$

这个 $(n-1) \times (n-1)$ 维矩阵是对称、三对角和对角占优矩阵，可以使用“追赶法”（Thomas 算法）来求得，这里不再展开描述。

四　一些特殊情况

当我们知道两个点和它们的一阶导数时（共四个条件），也就可以很容易地计算出多项式的参数（叫做 Hermit 型插值多项式）。

同理，当我们知道两个点和它们的两阶导数（共四个条件），也可以很容易计算出多项式参数（叫做 Lidstone 型插值多项式）。

它们的推导和使用方法可以从网上进行搜索。

参考文献

[1] William H. Press, Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. 3rd Sep.2007

[2] [https://www.bilibili.com/video/BV1NA411E7Yr?p=4]

[3] [https://blog.csdn.net/mw__1422102031/article/details/109957445]

[4] [https://www.zhihu.com/question/25952605/answer/713083818]

[5] [刘鸿文．材料力学：高等教育出版社，2011：121-123]