图像噪声的种类

Dezeming Family

2022 年 5 月 25 日

DezemingFamily 系列文章和电子书**全部都有免费公开的电子版**，可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列电子书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新的版本。对文章的内容建议和出现的错误也欢迎在网站留言。

目录

一　本文介绍

本文会从更符合直觉的角度来介绍各种常见的噪声形式。带噪声图像常见于计算机图形渲染，例如光线追踪蒙特卡洛估计带来的高频噪声，或者光子映射中光子估计带来的低频噪声，这些噪声与图像本身是有很大关系的，比如在渲染中，有些区域噪声更多，有些区域噪声更少；还有比如 X 射线成像时，量子有限成像带来的噪声。

而在图像处理中，有些成像设备和环境条件就容易带来图像噪声，比如夜晚手机拍的风景就容易看到高频的噪点。很多时候我们不知道噪声的来源，因此很难区分噪声和图像之间的关系，我们一般会假设噪声是图像无关的。我们在描述大多数噪声形式时，都是假设噪声是出现在灰度图上的，而彩色图像噪声会更复杂一些。

二　图像无关的概率密度型噪声模型

2 1　高斯噪声

高斯噪声 (Gaussian noise) 在数学上最容易处理，它有着很明确的形式（而且符合统计学），对于灰度值 z 和像素平均灰度值 $\overline{z}$，高斯噪声的概率密度函数为（σ 为标准差）：

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\overline{z})^2}{2\sigma^2}} \tag{二.1}$$

如果要生成高斯噪声，可以这么做：设 $\overline{z} = 0$，然后根据概率密度函数生成随机数 r_i（注意 r_i 的期望是 0)，将 r_i 附加到图像第 i 个像素上。高斯噪声在方差比较小的时候，在图像上的很难被看出有噪声。

2 2　瑞利噪声

瑞利噪声 (Rayleigh noise) 是符合瑞利分布（随机二维向量的两个分量呈现独立的、有相同方差的正态分布）的一类噪声，它的概率密度函数为：

$$\begin{aligned} & p(z) = \left\{ \tfrac{2}{b}(z-a)e^{-(z-a)^2/b} \right. \\ & \overline{z} = a + \sqrt{\pi b/4} \\ & \sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4} \end{aligned} \tag{二.2}$$

2 3　爱尔兰（伽马）噪声

Gamma 分布来自于二项分布泛化，具体来源可以参考 [1]。伽马噪声 (Erlang noise, Gamma noise) 就是符合 Gamma 分布的噪声。

$$\begin{aligned} & p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az}, & z \geq a \\ 0, & z < a \end{cases} \\ & \overline{z} = \frac{b}{a} \\ & \sigma^2 = \frac{b}{a^2} \end{aligned} \tag{二.3}$$

Gamma 噪声常见于中子成像、激光成像等成像技术中，这里不详细展开。注意通常情况下的爱尔兰噪声并不能直接被称为 Gamma 噪声，除非分母 $(b-1)!$ 替换为 Gamma 函数 $\Gamma(b)$。

2 4 指数噪声

即符合指数分布的噪声 (Exponential noise)，是一种特殊的爱尔兰分布（$b=1$，注意 $0!=1$）：

$$
\begin{aligned}
p(z) &= \begin{cases} ae^{-az}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \qquad a > 0 \\
\overline{z} &= \frac{1}{a} \\
\sigma^2 &= \frac{1}{a^2}
\end{aligned} \tag{二.4}
$$

2 5 均匀噪声

均匀噪声 (uniform noise) 的概率密度函数在某一段是大于 0 的常数，其他地方为 0：

$$
\begin{aligned}
p(z) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq z \leq b \\ 0, & otherwise \end{cases} \\
\overline{z} &= \frac{a+b}{2} \\
\sigma^2 &= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned} \tag{二.5}
$$

2 6 椒盐噪声

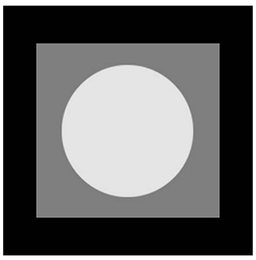
椒盐噪声 (Impulse (salt-and-pepper) noise) 相当于以一定概率密度使得图像某些像素变为两种特定值：

$$
p(z) = \begin{cases} P_a, & z = a \\ P_b, & z = b \\ 1 - P_a - P_b, & otherwise \end{cases} \tag{二.6}
$$

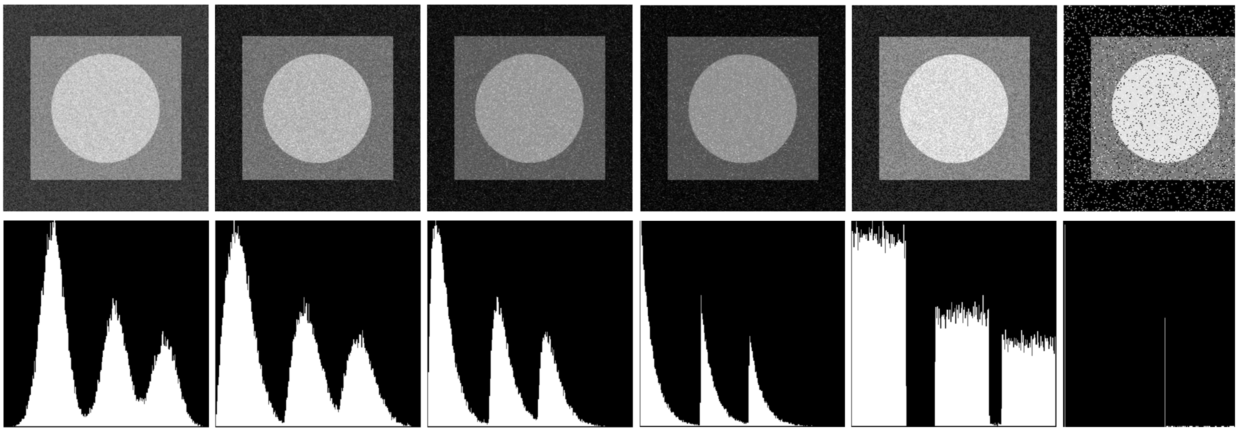
在 otherwise 时表示当前像素值不变。

2 7 各种概率密度型噪声总结

假设原图如下（注意该图只有三种灰度，所以直方图就三个点有值）：



各种概率密度型噪声对图像的影响可以参考下图（上排是加噪后的图像，下排是加噪后的图像的直方图）：



Gaussian Rayleigh Gamma Exponential Uniform Salt & Pepper

2 8 泊松噪声

符合泊松分布的噪声 (Poisson noise)。泊松分布是二项分布中，当实验次数 n 很大，但事件概率 p 很小时的分布逼近，而且是一种离散概率分布。

在低照度情况下，相机拍到的暗图中的噪声就近似于泊松分布噪声。

三 有色噪声与白噪声

还有些所谓的“噪声”，比如白噪声，其实就是完全随机的噪声。白噪声没有任何规律，任意两点之间的值也没有任何关系。白噪声可以用概率密度模型来产生，只要确保当前点噪声值与历史无关即可。白噪声来自于“白光”，白光是各种频率（即对感知来说就是各种颜色）的单色光混合得到，白噪声则是功率谱密度在整个频域内都是均匀分布的，频率有着相同能量密度的随机噪声（将白噪声转化到频域以后就能得到平坦的功率谱，类似于标准白光中各个频率成分相同）。有利于睡眠的雨声就是白噪声。

功率谱密度函数不平坦的噪声就是有色噪声，比如红噪声、粉红噪声等。

四 平稳和非平稳噪声

在信号分析领域，还存在有平稳噪声和非平稳噪声。以前在学习生物医学信号处理时，老师就一直强调生物医学信号的非平稳性以及难以预测性。

首先说一下自相关函数。在信号分析中，一个信号 $x(t)$ 任意两个时刻之间的信号值的关系就构成了自相关函数，计算方式为：

$$
\begin{aligned}
R_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \\
&= x(t) * x(-t)
\end{aligned}
\tag{四.1}
$$

自相关函数是一个偶函数，而且周期信号的自相关函数仍然是同频率的周期信号。

白噪声的自相关函数是一个冲激函数（任何两个不同时刻都不相关）；注意一般而言，平稳噪声的自相关函数只与时间差有关（也就是任意两个时刻的噪声值的相关性只取决于这两个时刻的距离），我觉得正是因为平稳信号是“平稳”的，才能求自相关函数，否则并没有自相关性这种说法。另外，平稳噪声的均值都是常数。

由此可见，白噪声就是平稳噪声的一种特例，因为白噪声的相关函数是冲激函数，确实与时间差有关（仅在时间差为 0 时相关函数有值），而且均值是常数（为 0）。

平稳信号的特点在于，统计特性不随时间改变，不会有新的信息被引入，因此，只需要观察一定的时间，就能完全确定这个信号的所有特征和信息。非平稳信号则相反，它会不断引入新的信息，从而无法获得期望和方差。考虑一个正弦信号，随着时间震荡的越来越快，同时在该信号上添加一点白噪声，那么这个信号就更加不可预测。因此，非平稳噪声无法通过统计的方式来确定性质，因此处理起来难度较大。

参考文献

[1] https://cosx.org/2013/01/lda-math-gamma-function