PBRT 小专题-光子映射与能量表示

Dezeming Family

2022 年 11 月 28 日

因为本书是电子书，所以会不断进行更新和再版（更新频率会很高）。如果您从其他地方得到了这本书，可以从官方网站：https://dezeming.top/ 下载新的版本（免费下载）。

源码见网址 [https://github.com/feimos32/PBRT3-DezemingFamily]。

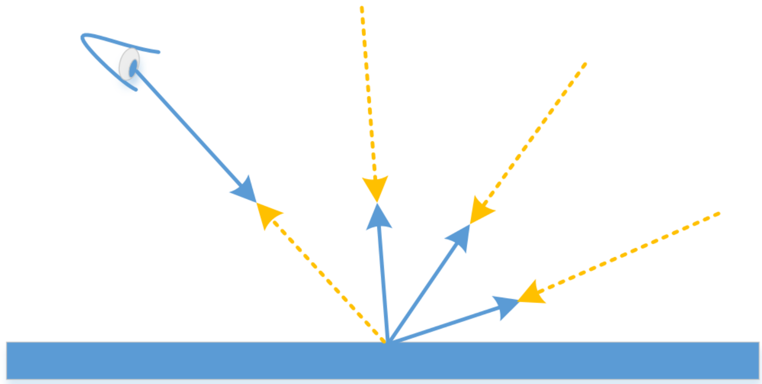
前言

在 PBRT 系列电子书中，我们介绍了很多渲染相关的理论和概念，在“高级积分器”部分我们也介绍了随机渐进式光子映射这种技术。然而，光子映射作为一种双向方法，并不像单向方法那么容易，因为双向方法需要考虑光源发出的光线如何被相机路径测量到。

在阅读本文之前，应该至少读完“模拟光传输的鲁棒的蒙特卡洛方法（Eric Veach）全文解读”中的《辐射度量学与光传输算子》以及《光传输的路径积分与符号表示》这两个部分，以及双向路径追踪和光子映射方法。本文主要参考自 [4]，需要注意这里和 Veach 的论文中的描述中的不同的地方。

相机发出的射线本质上是重要性射线，也就是用于测量入射光线值的射线。比如对于投影相机，一开始发出的射线 $\mathbf{r}$ 重要性为 1，意味着沿着 $\mathbf{r}$ 的反方向射入到相机的辐射度可以正好全部被测量到，其传感器响应结果值就是入射的辐射度值。当相机采样射线被散射一次以后，重要性值也需要被改变，这相当于去估计散射一次的光的辐射度响应。

光源发出的光线本质上是辐射度射线。如果说重要性射线的目的是为了估计辐射度，那么辐射度射线的目的是为了估计重要性。见下图，设蓝色箭头是相机射线，橙色虚线箭头是光源射线：



一开始，相机发射的射线其重要性为 1，意味着相机传感器接收到的光线辐射度的响应值就是光线辐射度值。但是当考虑一次散射的光线时，它们的入射辐射度就不能完全被相机响应了，因为它们会经历一次散射而被削弱。所以此时我们会假设相机重要性响应传感器被放置到了散射点上，以此来估计入射的光源对相机的响应。不过还需要注意的是，当把一个点处的光照分解为直接照明和间接照明时，直接照明的估计一般是直接采样光源，此时它相当于没有考虑相机传感器放置到了散射点上接收光照，而是直接计算直接光照入射以后反射到人眼的部分。

本文会对上述内容进行更多解释，因此本文不止包含有光子映射相关技术，还包括了双向路径追踪中的相似的问题。

目录

一　光子辐射度量学

1 1　辐射度量学

光具有波粒二象性，当假设为粒子时，光粒子的最小单位是一个光子。一个光子的能量 e_λ 表示为：

$$e_\lambda = \frac{hc}{\lambda} \tag{一.1}$$

$h \approx 6.63 \cdot 10^{-34} J$ 是普朗克常量，c 是光速，λ 是波长。因此一个光子的能量也可以写为：

$$e_\lambda = h\omega \tag{一.2}$$

其中 ω 表示频率。

光谱辐射能量 (spectral radiant energy)Q_λ 统计的是波长为 λ 的光子的能量和：

$$Q_\lambda = n_\lambda e_\lambda \tag{一.3}$$

n_λ 就表示波长为 λ 的光子数量。

辐射能 (Radiant energy)Q 就是全部波长的光子能量进行统计：

$$Q = \int_0^\infty Q_\lambda d\lambda \tag{一.4}$$

其他方面跟以前讲过的辐射度量学没有什么区别。比如功率（又叫能流）、辐射通量 (irradiance) 和辐射度 (radiance)。功率可以写为：

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{dQ}{dt} \\
\Phi &= \int_A E(x)dx \\
E &= \int_\Omega L(x,\omega_i)(n\cdot\omega_i)d\omega_i \\
\Phi &= \int_A\int_\Omega L(x,\omega_i)(n\cdot\omega_i)d\omega_i dx
\end{aligned} \tag{一.5}$$

1 2　光子度量学

光子度量学的区别在于它包括了传感器响应（又叫视觉响应 visual response）。$V(\lambda)$ 就是对波长为 λ 的光的视觉响应。定义光通量 (Luminous flux)，设可见光光谱范围是 Λ：

$$\Phi_v = \int_\Lambda \Phi_\lambda V(\lambda)d\lambda \tag{一.6}$$

光通量面密度 (luminous flux area density)，如果是入射光，就被叫做 illuminance，符号是 E_v；如果是出射光，就被叫做 luminous exitance，符号是 M_v：

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi_v}{dA} &= E_v \quad incident \\
\frac{d\Phi_v}{dA} &= M_v \quad outgoing
\end{aligned}$$

Luminous intensity 表示单位立体角的 Φ_v，符号为 I_v：

$$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\omega} \tag{一.7}$$

luminance 定义为：

$$L_v(x,\omega) = \frac{d^2\Phi_v}{\cos\theta dA d\omega} \tag{一.8}$$

我们可以看到，luminance 就是相当于对 radiance 的测量响应。

1 3　发光

光源会产生光子。光源的发光密度被解释为功率（这里不用辐射度 radiance 来描述，是因为我们希望描述光源的发光总量）。

对于一个功率为 Φ_s 的点光源，它均匀地朝着所有方向发光。设场景中有一个表面，表面点 x 距离点光源长度为 r，表面向量与光源方向夹角为 θ，由此我们可以计算的 irradiance（单位面积的入射功率）为：

$$E(x) = \frac{\Phi_s \cos\theta}{4\pi r^2} \tag{一.9}$$

对于上式，我们知道球面面积是 $4\pi r^r$，功率被均匀地分布在这个球上。所以距离 r 处接收到的功率就是：

$$\frac{\Phi_s}{4\pi r^2} \tag{一.10}$$

cos 项意味着朝着光源方向的表面接收到的功率更多（单位面积下光子更多）。

1 4　双向散射分布函数

对于出射方向 ω_o 的辐射度 $L(x,\omega_o)$，定义双向散射分布函数：

$$f_r(x,\omega_i \to \omega_o) = \frac{dL(x,\omega_o)}{dE(x,\omega_i)} = \frac{dL(x,\omega_o)}{L(x,\omega_i)\cos\theta d\omega_i} \tag{一.11}$$

为什么不把 BSDF 描述为 $\frac{dL(x,\omega_o)}{dL(x,\omega_i)}$，其实我觉得最主要的因素在于，在实际的物理世界中，入射光的辐射通量 $E(x,\omega_i)$ 更好测量（测量全部到达某个面的光线），而入射光的辐射度并没有那么好测量，因为还需要考虑单位投影立体角（传感器接收器必须与表面平行），而出射辐射度相对来说比较好测量，只需要用传感器对着出射方向即可。但是值得一提的是这么定义会带来很多好处，比如出射辐射度的大小与入射辐射度的 $\cos\theta$ 成正比，也与入射光的立体角范围大小成正比，如果用 $\frac{dL(x,\omega_o)}{dL(x,\omega_i)}$ 来描述 BRDF 时，cos 项和立体角也需要包含在其中。（$dL(x,\omega_o)$ 与 $dE(p,\omega_i)$ 是成正比的，而 $dL(x,\omega_o)$ 与 $dL(x,\omega_i)$ 并不是成正比关系，因为还需要考虑 cos 项，且对于不同方向的入射辐射度，对于表面来说单位面积对应的立体角范围也不同，因此 BRDF 的设定方式是一种比较自然的方式。）

反射率表示反射的光总量与入射光总量的比值，该值为 $0-1$ 之间，计算式为（Ω 表示表面法向量所在半球区间）：

$$\rho(x) = \frac{d\Phi_r(x)}{d\Phi_i(x)} = \frac{\int_\Omega \int_\Omega f_r(x,\omega_i \to \omega_o) L(x,\omega_i)\cos\theta d\omega_i d\omega_r}{\int_\Omega L(x,\omega_i)\cos\theta d\omega_i} \tag{一.12}$$

二　双向路径追踪的能量表示

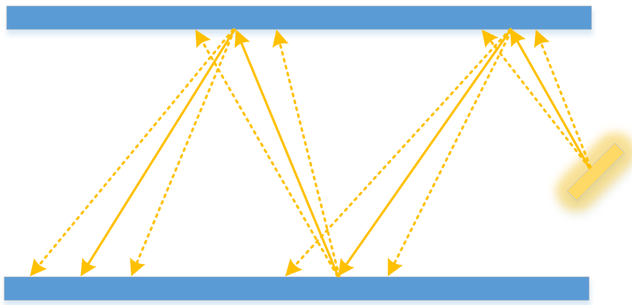
2 1　双向路径追踪与能量

先定义一个量纲：辐射密度 (radiant intensity) 描述每单位立体角的辐射功率 (radiant flux)：

$$I(\omega) = \frac{d\Phi}{d\omega} \tag{二.1}$$

相机路径是用来估计辐射度的，光源路径应该传输什么呢？一个很直白的感觉是光源应该传输辐射度，而书 [4] 中说传输的是功率，其实这只是说法的不同，实际操作起来并没有什么本质的区别（当然，从光子的角度来说，功率这个词更可靠一些）。

对于双向方法，我们可以认为光源路径传输的是功率，也可以认为是辐射度（虽然本质上是功率，但我们可以用辐射度来尝试理解一下光路）。比如下图：



发射点处辐射度到达表面以后因为距离因素削弱（单位立体角会随着距离其覆盖的面积变大），在接收点接收的辐射度值要除以距离的平方，还要乘以 cos 项，这个 cos 项本质上是面积相关的，因为正对着光源入射方向的表面，其单位面积接收到的功率越高。

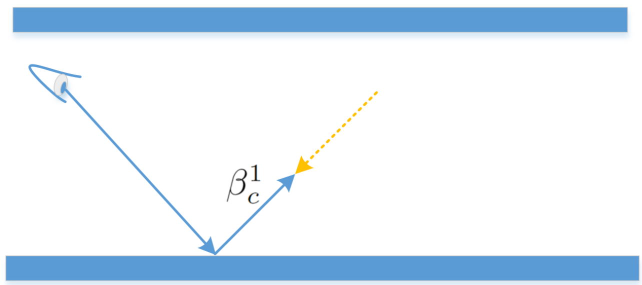
设沿着 ω_i 方向入射辐射度是 $L(x,\omega_i)$，接下来考虑散射，ω_i 方向入射到散射方向 ω_o 的辐射度为：

$$f_r(x,\omega_i \to \omega_o)L(x,\omega_i)|N_x \cdot \omega_i| \tag{二.2}$$

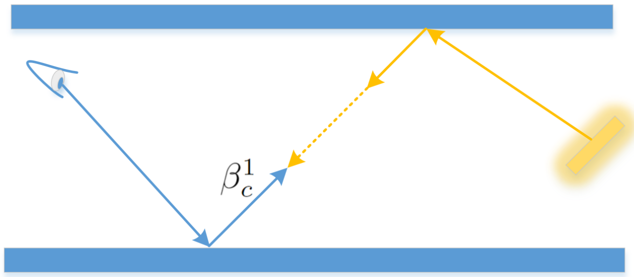
但在估计光照时，我们不可能只去跟踪一个立体角下的光照，我们估计的是全局光照。

考虑相机路径，对于还未经散射的初始相机射线，其权重为 1（非真实感相机），则从该方向入射到相机镜头的辐射度为 L 的光的相机传感器响应值就是 L 值。

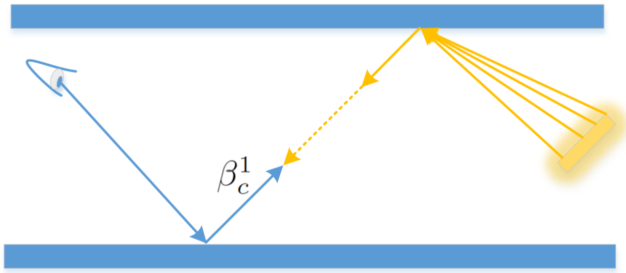
如果相机射线经过了一次散射采样，其权重变为了 β_c^1，意味着此时沿着该方向入射的辐射度 L 其相机响应值为 $\beta_c^1 \cdot L$，不过需要注意的是，因为此时的 β_c^1 使用了蒙特卡洛估计，因此它包含了一整个积分半球的概率采样。



现在估计一下光源发射的光经过散射一次以后被相机接收，就像这样：



但我们知道光源路径顶点上的光可能是任意方向照射过去的：



因此当我们研究 β_c^1 测量的入射入射度时，我们不能仅仅去估计一条光路，而是要考虑光源从各个位置发射到光源顶点上然后再散射到相机测量路径的量。因此我们可以知道，光源路径在构建的过程中，它传输的并不就是辐射度，而是对辐射度进行角度和面积的积分——即功率。在双向方法中，构建光源路径时，最初的 β_L^0 值就是功率估计（见 PBRT 的 GenerateLightSubpath() 函数）：

```
Spectrum beta = Le * AbsDot(nLight, ray.d) / (lightPdf * pdfPos * pdfDir);
```

每构建一个光源路径的顶点，就要记录入射到顶点之前的 β 值。然后在计算经过散射以后的 β 值并追踪下一个光源路径顶点。

2 2 连接相机路径顶点与光源路径

双向方法中，定义光源路径中的某个顶点 y_j 和相机路径中的某个顶点 x_i，相机路径的顶点如何估计光源顶点射入的辐射度呢？对于光子映射来说，光路径中，传递的是功率，又叫能流 (flux)。

辐射度可以定义为（$V(x_i \leftrightarrow y_j)$ 表示两点间的可见性）：

$$L(x_i \to x_{i-1}) = f_r(y_j \to x_i \to x_{i-1}) V(x_i \leftrightarrow y_j) \frac{|(y_j \to x_i) \cdot N_{x_i}|}{||x_i - y_j||^2} I(y_j \to x_i) \qquad (二.3)$$

上式意味着对于 $(y_j \to x_i)$ 方向的辐射密度（也就是单位立体角的能量），当发射到表面 x_i 上时，距离越远，x_i 接收到的功率就会越小，呈距离的平方关系减少；$|(y_j \to x_i) \cdot N_{x_i}|$ 就是 cos 项，相当于"投影"。这样得到的值其实就是辐射度值。只要知道从 y_{j-1} 射到 y_j 的功率，我们就可以知道光从 y_j 射到 x_i 的辐射密度 (radiant intensity)（N_{y_j} 表示 y_j 处表面的法向量）：

$$I(y_j \to x_i) = \Phi_i(y_j) |(y_j \to x_i) \cdot N_{y_j}| f_r(y_{j-1} \to y_j \to x_i) \qquad (二.4)$$

$|(y_j \to x_i) \cdot N_{y_j}|$ 就是 cos 项，意味着朝着法向量发射的单位立体角的功率更大。$\Phi_i(y_j) f_r(y_{j-1} \to y_j \to x_i)$ 意味着 y_j 处的功率（当然，"某个点的功率"这种描述方式并不是正确的，因为单个点处功率为 0，这里可以认为是该点处的单位面积的功率）发射到 $\omega_{y_j \to x_i}$ 方向的部分

2 3 PBRT 中的光源的描述

PBRT 中使用辐射密度 (radiant intensity) 来描述点光源的发光（即单位立体角的功率），定义为 I。在表面点对光采样时，PointLight::Sample_Li() 函数中，采样返回的辐射度就是 I 除以点光源到表面点的距离的平方（注意因为点光源是 delta 分布的，所以辐射度的计算并不能考虑"单位面积"，只能考虑"单位角度"）。

$$\Phi = 4\pi I \tag{二.5}$$

在某个表面点 x 处，法向量为 N_x，设光入射到 x 的反射方向为 ω_o，光入射方向为 ω_i（点光源在 p 点，$\omega_i = \omega_{x\to p}$），表面 BSDF 计算为 $f(x, \omega_i \to \omega_o)$。

对于路径追踪，相机沿着 ω_o 采样到 x 点时，想要估计点光源从 x 反射到 ω_o 方向的辐射度：

$$L(\omega_o) = \frac{f(x, \omega_i \to \omega_o)(N_x \cdot \omega_i)I}{||x-p||^2} = \frac{f(x, \omega_i \to \omega_o)(N_x \cdot \omega_i)\Phi}{||x-p||^2 \cdot 4\pi} \tag{二.6}$$

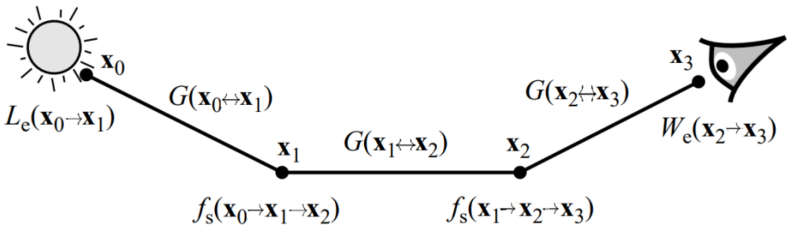
双向方法在点光源发射时，发射功率为 $4\pi I$，也就是初始的 β 值。

PBRT 中面光源的发射辐射度定义为 L，功率计算为（设表面面积为 A）（积分时面积项 A 在外面意味着对于漫反射面光源来说每个点处的发光情况都是一样的）：

$$A \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi = \pi A L \tag{二.7}$$

2 4　路径的估计

对于一条路径（可以参考《光传输的路径积分与符号表示》）$\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$，设 $N_\mathbf{x}$ 为 $\mathbf{x}$ 点处的法向量。



这一条路径的估计式就是：

$$\begin{aligned} &L_e(\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1)G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1)f_s(\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2) \\ &\quad \cdot G(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2)f_s(\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_3)G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3)W_e^{(j)}(\mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_3) \end{aligned} \tag{二.8}$$

一个像素的传感器响应值就是对所有到达像素范围的光线的积分。

对于 $G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3)$ 中，经常会设 $(N_{\mathbf{x}_3} \cdot \omega_{\mathbf{x}_3 \to \mathbf{x}_2}) = 1$，意为光线响应值着跟入射到相机胶片的方向无关（非真实感相机）。

需要注意的是，PBRT 中投影相机对 $W_e^{(j)}$ 在相机像素的面积和立体角区间的积分值为 1。我们以前说过投影相机在路径追踪时的 β 值为 1，意味着一个像素内的估计的入射辐射度值就是传感器响应值，且不与角度有关。在估计时，令 $W_e^{(j)}$ 在区间内积分为 1 也与这里设的 $\beta = 1$ 是为了保持一致的。虽然每条光线入射到像素内的权重都是一样的，但双向方法对相机射线进行采样时，就不能设每条光线的概率密度都相同了，因为不同的立体角下的采样密度是不同的。

三　双向方法与概率密度

3 1　顶点概率密度

双向方法中的一条路径的概率密度其实就是生成各个顶点的概率密度的乘积。这一条路径的顶点一部分由光源路径采样得到，另一部分是由相机路径采样生成。

有了生成各个顶点的概率密度以后，可以根据路径估计除以顶点概率密度，得到像素估计值。

3 2　双向方法与功率

双向方法传输的到底是功率还是辐射度，这个问题我们也做了一些阐述，本质上传输的功率，但是在实际计算中确是从辐射度导出来的，这一点并不矛盾。因为虽然描述功率看起来更直观，但我们追踪的是顶点，而顶点是没有“功率”这种说法的。

我们知道无论是双向路径追踪还是光子映射，光在一开始的权重都是：

```
// 光子映射
Spectrum beta = (AbsDot(nLight, photonRay.d) * Le) / (lightPdf * pdfPos *
    pdfDir);
// 双向路径追踪
Spectrum beta = Le * AbsDot(nLight, ray.d) / (lightPdf * pdfPos * pdfDir);
```

3 3　光子映射的密度估计

光子携带了功率，击中的表面表明该表面上有直接或间接照明。但是根据单个光子的功率无法判断这个区域有多少光被接收，因此我们需要定义光子密度：$d\Phi/dA$，该值其实意义就是 irradiance，即单位面积的功率。有了该值，再知道入射光方向，就能估计出射方向的辐射度了。

$$\begin{aligned} L(x,\omega_o) &= \int_\Omega f(x,\omega_i\to\omega_o)L_i(x,\omega_i)(N_x\cdot\omega_i)d\omega_i \\ L_i(x,\omega_i) &= \frac{d^2\Phi_i(x,\omega_i)}{(N_x\cdot\omega_i)d\omega_i dA} \end{aligned} \tag{三.1}$$

上式合并得到（假设一个小区域内有 p 个光子）：

$$\begin{aligned} L(x,\omega_o) &= \int_\Omega f(x,\omega_i\to\omega_o)\frac{d^2\Phi_i(x,\omega_i)}{d\omega_i dA}d\omega_i \\ &= \int_\Omega f(x,\omega_i\to\omega_o)\frac{d^2\Phi_i(x,\omega_i)}{dA} \\ &\approx \sum_{p=1}^{N} f(x,\omega_p\to\omega_o)\frac{\Delta\Phi_p(x,\omega_p)}{\Delta A} \end{aligned} \tag{三.2}$$

注意 $\sum_{p=1}^{N}\Delta\Phi_p/\Delta A$ 就相当于某个点处的 irradiance 值。

参考文献

[1] Pharr M, Jakob W, Humphreys G. Physically based rendering: From theory to implementation[M]. Morgan Kaufmann, 2016.

[2] Veach E . Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation[D]. Stanford University. 1998.

[3] https://www.cnblogs.com/starfallen/archive/2013/05/22/3091823.html

[4] Jensen, Henrik Wann. Realistic image synthesis using photon mapping. Vol. 364. Natick: Ak Peters, 2001.